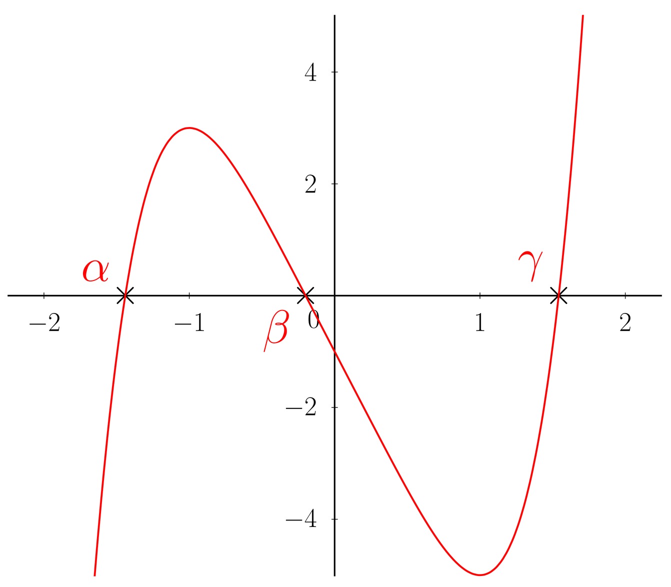
Exemples de résolution d'équations polynomiales

BRUNELLA Julian & MERASLI Marco
Club Info-Maths

Equation $x^2 - 2x - 1 = 0$

Pour résoudre l'équation, on utilise la méthode du discriminant. Ainsi, les solutions de l'équation sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

Représentation de la fonction $x^5 - 5x - 1$



Equation $x^3 - 3x - 1 = 0$

Pour résoudre l'équation, on calcule le discriminant $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ avec $p = -3$ et $q = -1$.
On trouve $\Delta = 81$ qui est supérieur à 0. Il existe alors trois solutions grâce au théorème de Cardan[1] :

$$z_0 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)\,; \qquad z_1 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\pi}{3}\right); \qquad z_2 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Equation $x^5 - 5x - 1 = 0$

Un peu de théorie. Le théorème d'Abel (1824) de Niels Henrik Abel[2] montre l'impossibilité de résoudre de façon exacte une équation polynomiale générique du cinquième degré. En 1851, Evariste Galois[3] généralise ce théorème aux équations polynomiales génériques de degré supérieur ou égal à 5. Cependant, des racines existent comme nous pouvons le voir sur la courbe ci-contre, ce qui est par ailleurs validé par le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	α	-1	β	1	γ	$+\infty$
$x^5 - 5x - 1$	$-\infty$	0	3	0	-5	0	$+\infty$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe trois solutions, chacune dans l'un des intervalles suivant : $]-\infty;-1[$, $]-1,1[$, et $]1;+\infty[$. Mais, quelles en sont les valeurs approchées ?

La méthode par dichotomie. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et admettant un unique zéro sur $]a,b[$ avec $f(a) < 0 < f(b)$ (ce raisonnement s'adapte sans problème au cas $f(a) > 0 > f(b)$).
On définit deux suites (a_n) et (b_n) avec $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Par construction, $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$ et $a_n < b_n$ pour tout n. De plus, définissant $u_n = b_n - a_n$, on a

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{u_n}{2} \quad \text{et donc} \quad u_n = \frac{b-a}{2^n} > 0.$$

Etudions à présent les variations de (a_n) et celles de (b_n).

- 1[er] cas : $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$. Alors : $a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n-b_n}{2} = -\dfrac{u_n}{2}$.
- 2[ème] cas : $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Alors : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} = \dfrac{u_n}{2}$ et $b_{n+1} - b_n = 0$.

Ainsi, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. De plus, comme (u_n) converge vers 0, on en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes. En particulier, elles convergent vers une limite commune ℓ.
Par continuité de la fonction f, on en déduit que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont convergentes vers $f(\ell)$.
En utilisant alors les inégalités $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$, on obtient $f(\ell) \leqslant 0$ et $f(\ell) \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$.
Conclusion : les deux suites (a_n) et (b_n) fournissent un encadrement de la solution $f(x) = 0$ à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près.

[1] Qui est Jérôme Cardan ?

Girolamo Cardano, né en 1501 à Pavie (Italie), et décédé en 1576 à Rome (Italie), ou encore Jérôme Cardan en français, est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIXe siècle.

[2] Qui est Niels Henrik Abel ?

Le Norvégien Niels Henrik Abel, né en 1802 à Nedstrand (Norvège) et décédé à Froland (Norvège) en 1829, a été l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Sa principale contribution est d'avoir démontré l'impossibilité de résoudre de façon exacte une équation polynomiale générique de degré 5.

[3] Qui est Evariste Galois ?

Évariste Galois, né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine (France) et mort le 31 mai 1832 à Paris (France), est un mathématicien français. Son nom a été donné à une branche des mathématiques dont il a posé les prémices, la théorie de Galois. Il a généralisé le théorème d'Abel aux polynômes génériques de degré cinq et supérieurs. Il meurt à 20 ans lors d'un duel aux armes à feu. Il laisse dans son sillage une œuvre scientifique très vaste, réalisée en une existence assez courte.

Recherche de valeur approchée avec Python

```python
def dichotomie(f,a,b,eps):
    ''' a,b,eps sont des valeurs numériques
    f est une fonction représentant une fonction numérique de [a;b] dans R et
    admettant un unique zéro alpha dans ]a;b[
    Renvoie un intervalle de longueur eps contenant alpha '''
    assert callable(f)
    assert isinstance(a,int) or isinstance(a,float)
    assert isinstance(b,int) or isinstance(b,float)
    assert isinstance(eps,int) or isinstance(eps,float)
    assert a < b
    while b - a > eps:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b

def poly_deg_5(x):
    return x**5 - 5*x -1

dichotomie(poly_deg_5, -2, -1, 10**(-5)) # -1.44050 < alpha < -1.44049
dichotomie(poly_deg_5, -1, 1, 10**(-5)) # -0.20006 < beta < -0.20005
dichotomie(poly_deg_5, 1, 2, 10**(-5)) # 1.54164 < gamma < 1.54165
```

LaTeX TikZposter