Intégrales et méthodes numériques

BRUNELLA Julian & MERASLI Marco
Club Info-Maths

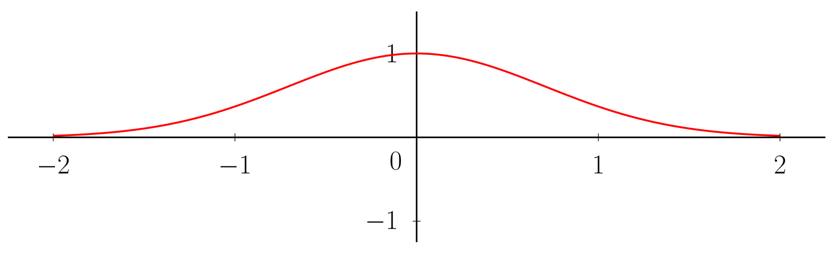
$\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x$???

D'après le théorème fondamental de l'analyse, cette intégrale existe car la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est définie et continue sur $[0,1]$. De plus, en notant F une de ses primitives, on a :

$$\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x = F(1) - F(0).$$

Or une telle primitive ne peut pas être écrite explicitement à l'aide des fonctions usuelles. On peut éventuellement l'écrire à l'aide de la fonction d'erreur erf, mais cela n'apporte rien pour le calcul effectif.
Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques afin d'obtenir une approximation de cette intégrale.

Courbe de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$



Méthode de Monte-Carlo implémentée en Python

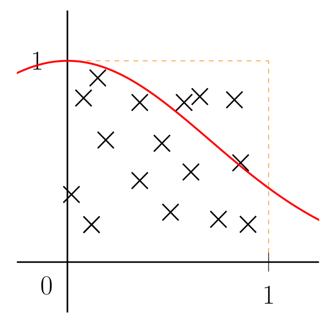
```python
from random import uniform
import math

def monte_carlo(n,f):
    pt_aire = 0
    for i in range(n):
        a = uniform(0,1)
        b = uniform(0,1)
        image = f(a)
        if b < image:
            pt_aire+=1
    return pt_aire/n

def fct_exp(x):
    return math.exp(-x**2)

# monte_carlo(10000,fct_exp)
# Renvoie A = 0.7447
```

Méthode des rectangles implémentée en Python

```python
from random import uniform
import math

def rectangles(a,b,n,f):
    L = (b - a) / n
    inf, sup = 0, 0
    for k in range (n):
        inf = inf+L*f(a+k*L)
        sup = sup+L*f(a+(k+1)*L)
    return inf, sup

def fct_exp(x):
    return math.exp(-x**2)

# rectangles(0,1,10000,fct_exp)
# Renvoie 0.74679 < A < 0.74685
```

La méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode probabiliste permettant de déterminer des aires. Ici, l'aire qui nous intéresse est celle délimitée par la courbe de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
Pour obtenir cette aire, on place aléatoirement n points distincts dans le carré de sommets $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$, et on compte le nombre k de points situés sous la courbe.

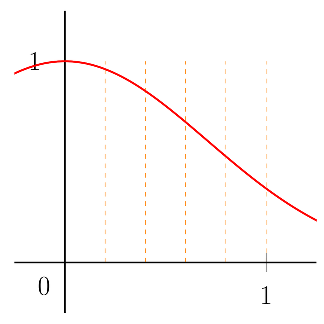
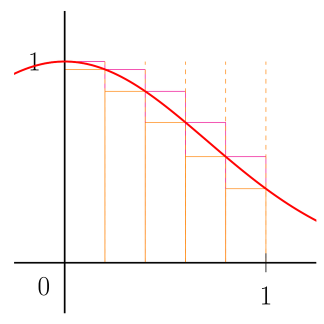


L'aire du carré valant 1, on en déduit qu'une approximation de l'aire sous la courbe est $\frac{k}{n}$. On peut montrer que, plus n est grand, plus cette valeur est précise.

La méthode des rectangles

La méthode des rectangles permet cette fois-ci de donner un encadrement de l'aire sous la courbe. Le principe est simple : on divise notre intervalle étudié, ici $[0;1]$ en n parties égales.
Ensuite, nous formons deux rectangles dans chaque divisions de la manière suivante :

- les rectangles inférieurs (oranges) sont crées de sorte à ce qu'ils ne dépassent jamais la courbe ;
- les rectangles supérieurs (violets) sont crées de sorte à ce qu'ils soient toujours au dessus de la courbe.

Il faut ensuite faire la somme de toutes les aires de tous les rectangles inférieurs, puis pareil pour les rectangles supérieurs.
Ainsi, la valeur de l'intégrale est encadrée par ces deux valeurs.

Démonstration de la méthode des rectangles

On va démontrer ici un résultat plus général :

Théorème des sommes de Riemann

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} G_n = \lim_{n\to+\infty} D_n$$

avec

$$G_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad D_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Remarque : dans le cas où $f : x \longmapsto e^{-x^2}$, G_n (resp. D_n) correspond à la somme des aires des rectangles oranges (resp. violets), ce qui valide la méthode des rectangles.

Démonstration du théorème des sommes de Riemann :
Posons M_1 le maximum de $|f'(x)|$ sur $[a;b]$ (il existe d'après le théorème des bornes). Soient $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ et u et v les fonctions définies sur $[\alpha;\beta]$ avec :

$$u(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-\alpha)f(\alpha) - M_1\frac{(x-\alpha)^2}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-\alpha)f(\alpha) + M_1\frac{(x-\alpha)^2}{2}$$

On montre facilement, en étudiant la dérivée seconde de u (resp. v), que u (resp. v) est négative (resp. positive) sur $[\alpha;\beta]$. En particulier, $u(\beta) \leqslant 0$ et $v(\beta) \geqslant 0$, ce qui donne les inégalités suivantes :

$$-M_1\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \leqslant \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t - (\beta-\alpha)f(\alpha) \leqslant M_1\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \Leftrightarrow \left|\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t - (\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \leqslant M_1\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \qquad (1)$$

On obtient alors, en posant $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - G_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}f(x_k)\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - (x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_1\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} \quad \text{(appliquer (1) avec } \alpha = x_k \text{ et } \beta = x_{k+1})\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} M_1\frac{(b-a)^2}{2n^2} = M_1\frac{(b-a)^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

On démontre de manière analogue le résultat sur D_n.

Remarque : la vitesse de convergence de (G_n) et (D_n) étant linéaire en $\frac{1}{n}$, on en déduit qu'il en est de même pour la méthode des rectangles.