Valeur approchée de $\sqrt{a}$

ALAMI Rania & BARRES Emma
Club Maths-Info – M. Remy et Mme Rousseau

Enoncé du problème

Soit $a > 0$ un nombre réel strictement positif. Par définition, il existe un unique nombre réel strictement positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à a.

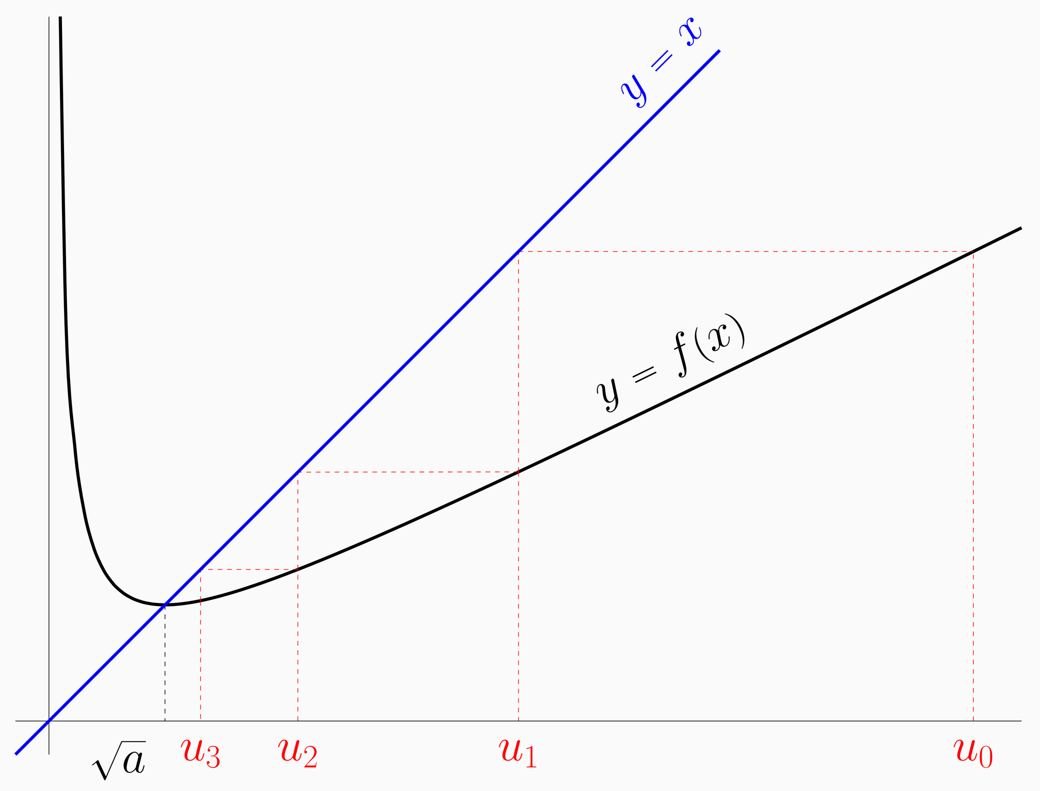
Comment obtenir une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à ε près ?

1. Définition de la suite (u_n)

Pour avoir une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à ε près, on utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \geqslant \sqrt{a}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$ avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

x	$\sqrt{a}$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\sqrt{a}$ $\nearrow$ $+\infty$

Tableau de variations de f



Représentation graphique des termes de la suite (u_n)

2. Etude de la suite (u_n)

Monotonie de la suite.
Montrons par récurrence que $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :
Montrons que $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{a}$.
Par définition, on a $u_1 = f(u_0)$ et $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) - u_0 = \frac{-u_0^2 + a}{2u_0}$.
Comme $u_0 \geqslant \sqrt{a}$ et $f(x) \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $x \geqslant \sqrt{a}$, on a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{a}$.

Hérédité :
Supposons la propriété vraie à un rang n fixé et montrons-la au rang $n + 1$
Par hypothèse, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$
Or f étant croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$, on a $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f(\sqrt{a})$ et donc bien $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \sqrt{a}$
D'où, la propriété au rang $n + 1$.

Conclusion :
La propriété est vraie au rang initial $n = 0$ et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Convergence.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$. D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) converge vers ℓ avec $\ell \geqslant \sqrt{a}$.

Détermination de ℓ.

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) = \ell \Leftrightarrow \ell^2 = a \Leftrightarrow \ell = \sqrt{a} \text{ ou } \ell = -\sqrt{a}$$

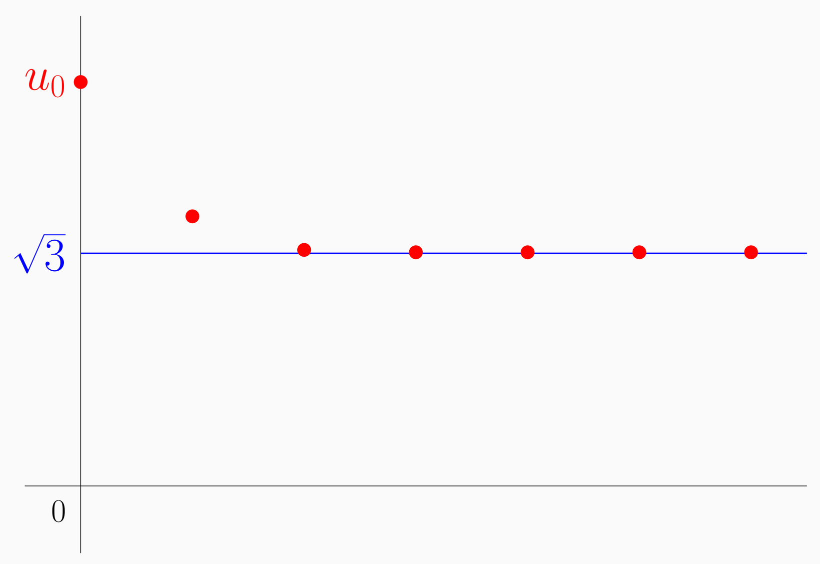
Or, $\ell > 0$, donc $\ell = \sqrt{a}$ et donc la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

3. Code Python et exemple

```
def valeur_approchee(a, eps):
    '''
    a et eps : valeurs numériques strictement positives
    Renvoie une valeur approchee de sqrt(a) à eps près
    '''
    assert isinstance(a, int) or isinstance(a, float)
    assert isinstance(eps, int) or isinstance(eps, float)
    assert a > 0 and eps > 0
    u = a
    if a < 1:
        u = 1
        eps =2*a*eps
    while u**2 - a > eps:
        u = 0.5*(u+a/u)
    return u

>>> valeur_approchee(3, 0.001)
1.7321428571428572
```

Exemple : valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près :



Répresentation des termes de la suite u_0=3 et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$

L'instruction `valeur_approchee(3, 0.001)` fournit une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3}, d'où $\sqrt{3} = 1,732$ à 10^{-3} près.

4. Algorithme et preuve

Preuve : il faut démontrer, d'une part, **la correction partielle** et, d'autre part, **la terminaison**

- **La correction partielle :** il s'agit de montrer que la valeur renvoyée par l'algorithme est bien une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à ε près.
- **La terminaison :** il s'agit de démontrer que l'algorithme se termine à l'aide d'un variant de boucle puisque l'on a une boucle `while`.

La suite (u_n) étant convergente vers $\sqrt{a}$ et décroissante, l'inégalité $u_N - \sqrt{a} \leqslant \varepsilon$ montre que u_N est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à ε près. Pour déterminer un tel terme, on doit écrire un algorithme utilisant uniquement les opérations usuelles et la valeur initiale de a.

Celui-ci est basé sur la discussion suivante :

- *Cas 1 : $a < 1$ et $\varepsilon' = 2a\varepsilon$*
$$u_N^2 - a < \varepsilon' \Rightarrow u_N - \sqrt{a} < \frac{\varepsilon'}{u_N + \sqrt{a}} < \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{a}} = \varepsilon\sqrt{a} < \varepsilon$$
- *Cas 2 : $a \geqslant 1$*
$$u_N^2 - a < \varepsilon \Rightarrow u_N - \sqrt{a} < \frac{\varepsilon}{u_N + \sqrt{a}} < \varepsilon$$

Conclusion : l'algorithme suivant convient :

1. Choix de u_0 et de la précision :
   - si $a < 1$, prendre $u_0 = 1$ et $\varepsilon' = 2a\varepsilon$;
   - si $a \geqslant 1$, prendre $u_0 = a$ et $\varepsilon' = \varepsilon$
2. Détermination de l'indice N :
   Calculer itérativement les valeurs de u_n jusqu'à obtenir l'inégalité $u_N^2 - a \leqslant \varepsilon'$
3. Renvoyer la valeur de u_N

La terminaison et la correction partielle sont assurées par la démonstration mathématique et les inégalités précédentes.